TD16

VARIABLES À DENSITÉS.

Exercice 1 **EDHEC** 2021 Exercice 2.

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. **a.** Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.

   b. On note F la fonction de répartition de Y. Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leqslant 0$.

2. **a.** Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

   b. On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geqslant 1$ ou que $x < 1$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

   Pour tout entier naturel non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   a. On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

   b. On pose $Y_n = \frac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. **a.** Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est strictement supérieur à la partie entière de $\frac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$.

   b. Déterminer un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. **cubes ou dans une semaine.** Conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.

Exercice 2 **ECRICOME** 2016.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

1. **Étude de la fonction** g.
   a. Montrer que la fonction est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
   b. Donner le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$. On précisera la limite de g en $+\infty$.
   c. Étudier la convexité de g sur $]0, +\infty[$.
   d. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. **Étude de variables aléatoires.**
   a. Montrer que la fonction g est une densité de probabilité.
   On note Y la variable aléatoire dont une densité est la fonction g, et dont la fonction de répartition est noté G.
   b. Sans calcul, justifier que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   c. Montrer que pour tout réel x,
   $$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-1}(1 + x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$
   d. Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance, que l'on calculera.
3. On considère la variable aléatoire $Z = e^Y$.
   a. Déterminer la fonction de répartition notée H de la variable aléatoire Z.
   b. En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.
   c. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

Exercice 3

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash[-1, 1] \end{cases}.$$

1. Représenter l'allure de la courbe de f.
2. **a.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)dx$.
   b. Vérifier que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire admettant f comme densité.

3. **a.** Établir l'existence de l'espérance de X et calculer sa valeur.
   b. Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.
4. Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X est définie par
   $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable à densité. On note F_Y sa fonction de répartition.

5. **a.** Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.

b. Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.

c. En déduire qu'une densité de Y est la g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash[0,1] \end{cases}.$$

d. Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

6. On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniformes sur $[0,1]$.

On pose $I = \min(U,V)$. On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on note F_I la fonction de répartition de I.

a. Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.

b. En déduire que I suit la même loi que Y.

c. Compléter la déclaration de la fonction Python suivante pour qu'elle simule la loi de Y.

```python
def sumul_Y():
  U = .....
  V = .....
  if ..... :
    return .....
  else :
    return .....
```

Exercice 4

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi *log-normale* si $X = \ln(Y)$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Trouver une densité de X et calculer son espérance.